Přehled vzorců z matematiky

1) Výrazy:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

2) Mocniny:

$$a^n = a\,.\,a\,.\,a\,.\,a\,.....\,a$$

$$a^r\,.a^s = a^{r+s}$$

$$(a\,.\,b)^r = a^r\,.\,b^r$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

$$\left(a^r\right)^s = a^{r.s}$$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = a^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

3) Odmocniny:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

$$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\sqrt[m.p]{a^{m.n}} = \sqrt[p]{a^n}$$

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$$

4) Kvadratická rovnice:

$$\mathbf{a\,x^2 + b\,x + c = 0} \qquad \text{kde } a \neq 0$$

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

5) Komplexní čísla:

$\mathbf{i} = \sqrt{-1}$

- $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$
- $i^3 = i^2 \cdot i = -i$
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1).(-1) = 1$
- $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$
- $i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$
-
-

Algebraický tvar komplexního čísla: $\mathbf{a = a_1 + a_2.i}$

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$\mathbf{a = a_1 + a_2.i \;\; ; \;\; b = b_1 + b_2.i}$

$\mathbf{a + b = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i}$

$\mathbf{a - b = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)i}$

$a \cdot b = (a_1.b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1).i$

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1 + a_2 i}{b_1 + b_2 i} \cdot \frac{b_1 - b_2 i}{b_1 - b_2 i} = \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{b_1^2 + b_2^2}$$

Čísla komplexně sdružená: $a = a_1 + a_2 i \;\; ; \;\; \overline{a} = a_1 - a_2 i$

Goniometrický tvar komplexního čísla: $a = |a|.(\cos\alpha + i.\sin\alpha)$

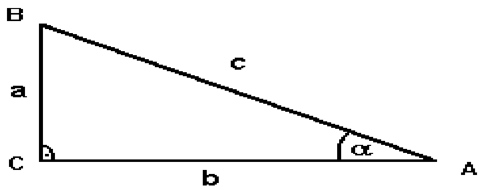
6) Goniometrie:

$$\mathbf{\sin\alpha = \frac{a}{c}}$$

$$\mathbf{\cos\alpha = \frac{b}{c}}$$

$$\mathbf{tg\,\alpha = \frac{a}{b}}$$

$$\mathbf{cotg\,\alpha = \frac{b}{a}}$$



	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nedef.
cotg α	nedef.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	I	II	III	IV
sin α	+	+	-	-
cos α	+	-	-	+
tg α	+	-	+	-
cotg α	+	-	+	-

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\mathrm{cot\ \ g}x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\mathrm{tg}x = \frac{1}{\mathrm{co\ \ tg}x}$$

$$\sin 2x = 2.\sin x.\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin(x+y) = \sin x.\cos y + \cos x.\sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x.\cos y - \cos x.\sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y$$

$$\sin x + \sin y = 2.\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2.\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$$

Sinová věta: $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Kosinová věta:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\gamma$$

7) Obsahy ploch:

Rovnoběžník:

$S = a.\ v$

$S = a.b.\ \sin\alpha$

$o = 2.\ (a + b)$

Trojúhelník

$o = a + b + c$

$S = \frac{1}{2} z.v$

$S = \frac{1}{2} a.b.\sin\gamma$

Heronův vzorec: $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $\left(s = \frac{a+b+c}{2} \right)$

$S = \frac{abc}{4r}$

$S = \rho.s$

Lichoběžník

$o = a + b + c + d$

$S = \frac{(a+c).v}{2}$

N - úhelník

$S = \frac{1}{4} na^2 \operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{n}$

$S = \frac{1}{2} nr^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$

$S = n\rho^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$

$o = n.a$

délka kružnice (obvod kruhu): $l = 2.\pi.r$

obsah kruhu: $S = \pi.r^2$

$S = \pi d^2 : 4$

délka kruhového oblouku: $l = \frac{\pi.r}{180^\circ}.\alpha$

obsah kruhové výseče: $S = \frac{\pi.r^2}{360^\circ}.\alpha$

obsah kruhové úseče: $S = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi.\alpha}{180} - \sin\alpha \right)$

8) Stereometrie:

Kvádr: $V = a.b.c$

$S = 2.(ab+bc+ac)$

Krychle: $V = a^3$

$S = 6.a^2$

Válec: $V = \pi r^2.v$

$S = 2\pi r.(r+v)$

Jehlan: $V = \frac{1}{3} P.v$ P - plocha podstavy

$S = P + \text{plášť}$

Kužel: $V = \frac{1}{3} \pi.r^2.v$ *s* - strana kužele

$S = \pi.r(r+s)$

Komolý jehlan: $V = \frac{1}{3}v(Sp_1 + \sqrt{Sp_1Sp_2} + Sp_2)$

$S = S_{pláště} + S_{p1} + S_{p2}$

Komolý kužel: $V = \frac{1}{3}\pi . v(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$

$S = \pi . r_1^2 + \pi . r_2^2 + \pi\left(r_1 + r_2\right).s$

Koule a její části:

Celá koule: $V = \frac{4}{3}\pi . r^3$

$S = 4.\pi . r^2$

Kulová úseč: $V = \frac{\pi . r_1^2 . v}{2} + \frac{\pi . v^3}{6}$

Kulový vrchlík: $S = 2.\pi . r. v$

Kulová výseč: $V = \frac{2}{3}.\pi . r^2 . v$

Kulová vrstva: $V = \frac{\pi . r_1^2 . v}{2} + \frac{\pi . r_2^2 . v}{2} + \frac{\pi . v^3}{6}$

Kulový pás: $S = 2.\pi . r. v$

9) Analytická geometrie v rovině

vzdálenost dvou bodů v rovině: $|AB| = \sqrt{\left(x_A - x_B\right)^2 + \left(y_A - y_B\right)^2}$

střed úsečky v rovině: $x_s = \frac{x_A + x_B}{2}$ $y_s = \frac{y_A + y_B}{2}$

souřadnice vektoru : $v = \overrightarrow{AB}$ $A = [x_A, y_A]$; $B = [x_B, y_B]$

$v = (v_1, v_2) = (x_B - x_A, y_B - y_A)$

velikost vektoru: $|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

skalární součin vektorů: $u \circ v = u_1 . v_1 + u_2 . v_2$

úhel dvou vektorů:

$$\cos\alpha = \frac{u \circ v}{|u|.|v|}$$

$$\cos\alpha = \frac{u_1 . v_1 + u_2 . v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} . \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

parametrická rovnice přímky: $X = A + t. v$

p : $x = a_1 + t.v_1$

$y = a_2 + t.v_2$

obecná rovnice přímky: $ax + by + c = 0$

úhel přímek: $\cos\alpha = \frac{|u \circ v|}{|u|.|v|} = \frac{|u_1v_1 + u_2v_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$

vzdálenost bodu $A = [x_0, y_0]$ od přímky p: $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

10) Analytická geometrie v prostoru

přímka v prostoru : $X = A + t. v$

p : $x = a_1 + t.v_1$

$y = a_2 + t.v_2$

$z = a_3 + t.v_3$

úhel přímek v prostoru : $\cos\alpha = \dfrac{|u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$

parametrická rovnice roviny: $X = A + t.\,v + k.u$

ρ : $x = a_1 + t.v_1 + k.u_1$

$y = a_2 + t.v_2 + k.u_2$

$z = a_3 + t.v_3 + k.u_3$

obecná rovnice roviny: $ax + by + cz + d = 0$

vzdálenost bodu A= [x₀,y₀z₀] od roviny: $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

11) Analytická geometrie kvadratických křivek

rovnice kružnice: $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ $S = [m, n]$

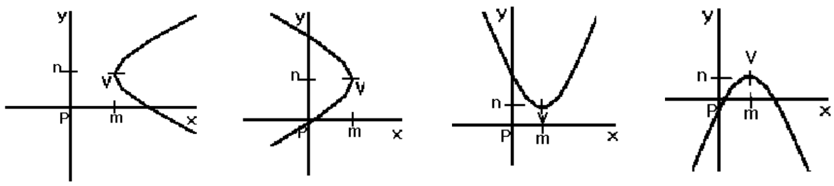
rovnice elipsy: $\dfrac{(x - m)^2}{a^2} + \dfrac{(y - n)^2}{b^2} = 1$ $a^2 = b^2 + e^2$

rovnice hyperboly: $\dfrac{(x - m)^2}{a^2} - \dfrac{(y - n)^2}{b^2} = 1$ $e^2 = b^2 + a^2$

asymptoty hyperboly: $(y - n) = \dfrac{b}{a}(x - m)$

$(y - n) = -\dfrac{b}{a}(x - m)$

rovnice paraboly :



a) $(y - n)^2 = 2p\,(x - m)$

b) $(y - n)^2 = -2p\,(x - m)$

c) $(x - m)^2 = 2p\,(y - n)$

d) $(x - m)^2 = -2p\,(y - n)$ *a)* *b)*

c) *d)*

12) Logaritmus: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

pravidla pro logaritmování $\log_a x.y = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^n = n.\log_a x$

$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}.\log_a x$

13) Posloupnosti

aritmetická $a_{n+1} = a_n + d$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_s = a_r + (s-r)d$

$s_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right)$

geometrická $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

$a_n = a_1 . q^{n-1}$

$a_r = a_s . q^{r-s}$

$s_n = a_1 . \frac{q^n - 1}{q - 1}$ $\quad (q \neq 1)$

14) Nekonečná geometrická řada:

$s = \frac{a_1}{1 - q}$ $\quad |q| < 1$

15) Kombinatorika:

variace k- té třídy z n prvků $V_k(n) = n.(n-1).(n-2).....(n-k+1)$

variace k- té třídy z n prvků s opakováním $V'_k(n) = n^k$

permutace bez opakování $P(n) = n!$ $\quad n! = n.(n-1).(n-2)......2.1$

permutace s opakováním $P'_r(n) = \frac{n!}{r!}$ $\quad$ (r prvků se opakuje)

kombinace k -té třídy z n prvků $C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$

vlastnosti kombinač. čísel:

$\binom{n}{0} = 1$

$\binom{0}{0} = 1$

$\binom{n}{1} = n$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

binomická věta $\left(a + b\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

16) Pravděpodobnost:

$P(A) = \frac{m}{n}$

doplňkový jev : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

sjednocení jevů: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

průnik jevů: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

17) Diferenciální počet:

definice derivace:

$$\lim_{\triangleleft x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangleleft x) - f(x_0)}{\triangleleft x}$$

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^n	$n.x^{n-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$tg\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$cotg\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log x$	$\frac{1}{x} . \log e$

derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí:

Pro jednoduchost nahradíme $f(x) = u$, $g(x) = v$

$(u + v)' = u' + v'$

$(u - v)' = u' - v'$

$(k.u)' = k . u'$ kde k *je* libovolná konstanta

$(u . v)' = u'. v + u . v'$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

derivace složené funkce:

Pro zjednodušení označujeme vnitřní funkci proměnnou t $\quad y_x' = y_t' . t_x'$

.

tečna funkce v bodě T = [x_0, y_0]

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

18) Integrální počet:

pravidla pro integrování

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int k.f(x)dx = k.\int f(x)dx$$

integrace per partes (po částech):

funkce pro zjednodušení označíme jinými proměnnými : $f(x) = u$, $g(x) = v$

$$\int u'.v\, dx = u.v - \int u.v'\, dx$$

určitý integrál: : $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$

výpočet objemu tělesa: $V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\, dx$ *(f rotuje okolo osy x)*

$f(x)$	$\int f(x)$
c	$x + c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tg\ x + c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot g\ x + c$
e^x	$e^x + c$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + c$

19) Výroková logika

Pravdivostní tabulky:

p	**p´**
1	0
0	1

p	**q**	**p ∧ q**	**p ∨ q**	**p ⇒ q**	**p ⇔ q**
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1